

4.5 Dynamic Characteristics of the Converter

Next, small signal dynamic characteristics when micro-fluctuations are applied to input voltage, duty ratio and load resistance will be examined. The following formula is obtained from Formulas (4.3) and (4.7):

FORMULA (4.16)

Here,

FORMULA (4.17)

if the above formula found in the previous section is substituted for the Formula (4.18),

FORMULA (4.18)

as the converter transfer function for each micro-fluctuation,

FORMULA (4.19)

is achieved. Further, the above results can be arranged as shown in the following formula.

FORMULA (4.20)

Small signal dynamic characteristics can be determined using the same method for step-down and step-up DC-DC converters, and can be integrated as shown in Formula (4.20). In Table 4.2, the parameters of the transfer function shown in Formula (4.20) are applied to step-down, step-up, and step-up/step-down converters.

Table 4.2 Dynamic Characteristics of PWM Converter in Continuous Current Mode

Circuit System	Step-down Type	Step-up Type	Step-up/Step-down Type
----------------	----------------	--------------	------------------------

Here, all converters are secondary systems, and in the case of step-up and step-up/step-down converters, it is known that the zero point W_{vdz} is in the right half-plane of s regarding the transfer function of the output voltage relative to the duty ratio. This becomes the cause for generating instability in the operation [of the converter] as a switching regulator that feeds back output voltage fluctuations to the duty ratio.

4.6 Regulation Characteristics

The following results are obtained from Formula (4.20) with regard to micro-fluctuations of output voltage of the converter.

FORMULA (4.21)

Output voltage can be regulated by detecting the output voltage of the converter, comparing this voltage to a reference voltage, amplifying the error, and controlling the ON/OFF period of the switch via the duty ratio controller (PWM controller). Fig. 4.3 represents the regulation mechanism for this in the form of a block diagram using the transfer function of Formula (4.21).

Fig. 4.3 Régulation Mechanism

DC-DC Converter

Here if we assume that a feedback loop comprising a PWM circuit is configured with an ideal amplifier of gain K , the following equation is obtained:

FORMULA (4.22)

5 And micro-fluctuations of the output voltage are determined by the following equation.

FORMULA (4.23)

If Formula (4.21) is used, the above formula becomes:

FORMULA (4.24)

10 Provided that:

FORMULA (4.25)

This is the basic formula for expressing the regulation characteristics of a switching converter.

15 The purpose of a switching regulator is to constantly regulate the output voltage relative to changes in input voltage and output current. Input/output characteristics (audio susceptibility) and output impedance can be cited as methods for accurately expressing output response and steady-state deviation relative to input voltage
20 fluctuations, and output voltage response and drooping characteristics relative to fluctuations of load current. Next, we will consider input/output characteristics (audio susceptibility) and output impedance when feedback is applied.

スイッチングコンバータの 基礎

九州大学名誉教授 工学博士

原 田 耕 介

九州大学教授 工学博士

二 宮 保

九州大学助手 工学博士

顧 文 建

共 著

コ ロ ナ 社

4

電流連続モードの特性解析

リアクトルを流れる電流がいかなる時刻においても零にならない動作を“リアクトル電流連続モード (continuous conduction mode: CCM)”と呼び、通常、PWM コンバータをこの動作モードで動作させている。本章では昇降圧形コンバータを例として、前章で述べた状態平均化法を用いて、電流連続モードにつき、静特性と動特性を解析する。

4.1 状態平均化方程式

図 4.1 に昇降圧形コンバータの回路およびスイッチがオンのときとオフのときにおける等価回路を示す。ここで、 r_s , r_D , r_L はそれぞれトランジスタスイッチのオン抵抗、ダイオードの順方向抵抗とリアクトルの損失抵抗を表している。ここでは、平滑コンデンサの等価直列抵抗を無視する。この場合、出力電圧は平滑コンデンサの電圧と一致し、出力方程式は不要となる。

スイッチがオンの期間〔状態Ⅰ、図 (b)〕では、リアクトルが入力電圧により励磁され、リアクトル電流は上昇する。また、この期間に、コンデンサは負荷に放電し、コンデンサ電圧は低下する。スイッチがオフの期間〔状態Ⅱ、図 (c)〕では、リアクトルの磁束が出力電圧でリセットされ、リアクトル電流は低下する。コンデンサはリアクトル電流と出力電流の差で充電され、コンデンサ電圧は上昇する。図 4.2 にスイッチの動作、リアクトル電流 i_L 、スイッチの電流 i_s 、スイッチの電圧 v_s 、ダイオードの電流 i_D 、コンデンサの電流 i_C および出力電圧 v_o の波形を示す。

図 4.1 の等価回路に基づき、リアクトル電流 i_L とコンデンサ電圧 (出力電

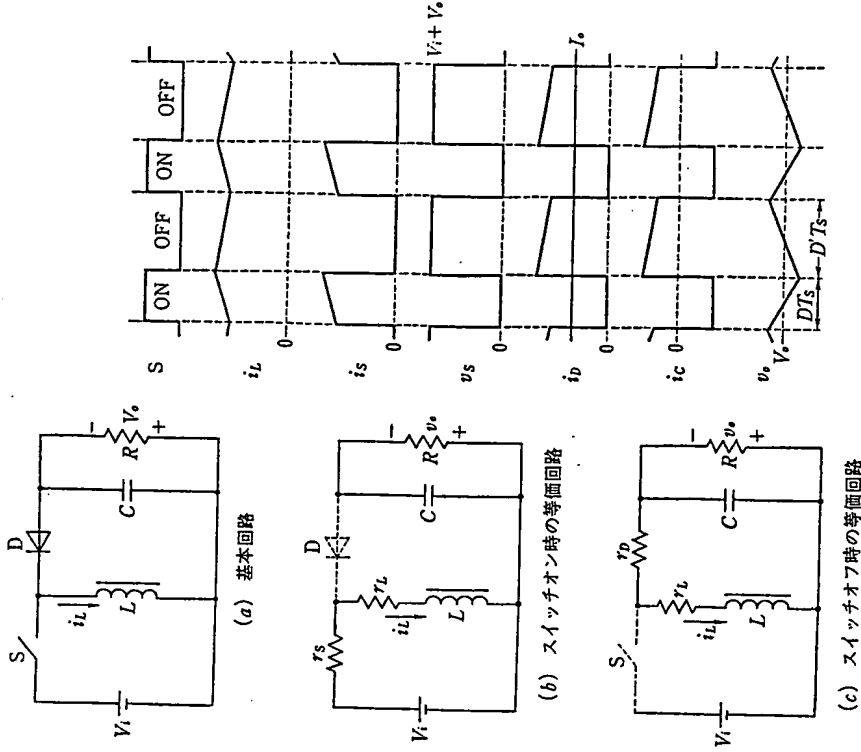


図 4.1 昇降圧形コンバータと等価回路

図 4.2 電流連続モードにおける昇降圧形コンバータの動作波形

圧) v_o に関し、キルヒホッフ電流法則と電圧法則を用いることにより、つぎの状態方程式が得られる。

状態Ⅰ (スイッチオン) に対し、

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= -\frac{r_L + r_s}{L} i_L + \frac{1}{L} V_i \\ \frac{dv_o}{dt} &= -\frac{1}{RC} v_o \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

状態Ⅱ (スイッチオフ) に対し、

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= -\frac{r_L + r_D}{L} i_L - \frac{1}{L} v_o \\ \frac{dv_o}{dt} &= \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{RC} v_o \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

状態ベクトルを $x(t) = [i_L(t) \quad v_o(t)]$ とし、つぎの係数行列

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{r_L + r_D}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ b_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{r_L + r_D}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

を用いて式 (4.1), (4.2) を表すと、次式となる。

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A_1 \bar{x} + b_1 V_i \quad (\text{スイッチオン}) \quad (4.4)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A_2 \bar{x} + b_2 V_i \quad (\text{スイッチオフ}) \quad (4.5)$$

前章で述べた状態平均化法により、平均化状態ベクトル $\bar{x}(t) = [\bar{i}_L(t) \quad \bar{v}_o(t)]$ に対し、つぎの状態平均化方程式が得られる。

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + bV_i \quad (4.6)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} \frac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \\ r &= Dr_s + D'r_D + r_L \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

4.2 コンバータの定常状態

定常状態では $d\bar{x}(t)/dt = 0$ とおくことにより、リアクトル電流と出力電圧はつぎのように求められる。

$$\begin{bmatrix} i_L \\ v_o \end{bmatrix} = -A^{-1}bV_i = \frac{D/D'V_i}{1 + Z_o/R} \begin{bmatrix} \frac{1}{D'R} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ここで、 Z_o はコンバータの内部抵抗であり、次式で示される。

$$Z_o = r/D'^2 \quad (4.9)$$

式 (4.8) において、内部損失を無視すれば、出力電圧は第2章で求めた昇降圧形コンバータの出力電圧と一致している。

また、式 (4.8) より、負荷電流 $I_o = V_o/R$ とリアクトル電流 I_L はつぎの関係を持つことがわかる。

$$I_L = \frac{V_o}{D'R} = \frac{I_o}{D'} \quad (4.10)$$

このことは、スイッチがオフのときのみリアクトル電流が負荷側に流れることからわかる。

4.3 リプル率

つぎに、リアクトル電流、出力電圧および平滑コンデンサ電流のリプルを求める。これらの値は電源を設計する際、重要なパラメータとなり、特にコンデンサのリプル電流は平滑用の電解コンデンサの寿命に大きな影響を与える。

図 4.2 の波形より、スイッチオフ時の状態方程式 (4.2) を用い、リアクトル電流のリプルは次式から得られる。

$$di_L = D'T_s \left[\frac{r_D + r_L}{L} i_L(DT_s) + \frac{1}{L} v_o(DT_s) \right] \quad (4.11)$$

リアクトル電流 i_L とコンデンサ電圧 v_o を式 (4.8) に示す定常値で近似すれ

ば、リアクトル電流のリプル率は

$$\frac{\Delta i_L}{I_L} = \frac{D'^2 T_s R}{L} \left(1 + \frac{r_D + r_L}{D' R} \right) \quad (4.12)$$

と得られる。同様に、スイッチオン時の状態方程式 (4.1) から、出力電圧のリプルは

$$\Delta v_o = D T_s \frac{V_o}{RC} \quad (4.13)$$

と求められ、リプル率は

$$\frac{\Delta v_o}{V_o} = \frac{D T_s}{RC} \quad (4.14)$$

となる。平滑コンデンサのリプル電流に関しては、図 4.2 の波形により、リアクトル電流の平均値で近似できる。したがって、式 (4.10) より

$$\Delta i_C = I_o / D' \quad (4.15)$$

となる。

4.4 コンバータの静特性のまとめ

降圧形・昇圧形コンバータについても、昇降圧形コンバータと同様な手順で静特性を解析することができ、定常状態、リプル率などが求められる。表 4.1 に降圧形、昇圧形および昇降圧形 DC-DC コンバータの静特性をまとめてある。

表 4.1 より、降圧形コンバータのほうが、出力電圧リプル率も平滑コンデンサのリプル電流も最も小さいことがわかり、大電力 (500 W 以上) 特に大電流出力電源に、降圧形コンバータまたはその絶縁方式、すなわちフェワードコンバータおよびブッジュブルコンバータがよく使われる。一方、昇圧形コンバータと昇降圧形コンバータでは、平滑コンデンサのリプル電流は負荷電流よりも大きく、大電力用電源に適しておらず、一般的には 100 W 以下の小容量電源に使われる。特に、昇降圧形コンバータの絶縁形回路、すなわちフライバックコンバータは回路部品数が最も少ないため、小容量電源に適している。

表 4.1 電流連続モードでの PWM コンバータの静特性

回路方式	降圧形	昇圧形	昇降圧形
M	$D \frac{1}{1+Z_o R}$	$\frac{1}{D'} \frac{1}{1+Z_o R}$	$\frac{D}{D'} \frac{1}{1+Z_o R}$
r	$D r_s + D' r_D + r_L$	$D r_s + D' r_D + r_L$	$D r_s + D' r_D + r_L$
Z_o	$D r_s + D' r_D + r_L$	$\frac{D r_s + D' r_D + r_L}{D'}$	$\frac{D r_s + D' r_D + r_L}{D'}$
$\frac{\Delta v_o}{V_o}$	$\frac{D' T_s}{8 L C} \left(1 + \frac{r_D + r_L}{R} \right)$	$\frac{D T_s}{R C}$	$\frac{D T_s}{R C}$
$\frac{\Delta i_L}{I_L}$	$\frac{D' T_s R}{L} \left(1 + \frac{r_D + r_L}{R} \right)$	$\frac{D D' T_s R}{L} \left(1 + \frac{r_D + r_L}{D' R} \right)$	$\frac{D' T_s R}{L} \left(1 + \frac{r_D + r_L}{D' R} \right)$
Δi_C	$\frac{D' T_s I_o R}{L} \left(1 + \frac{r_D + r_L}{R} \right)$	$\frac{I_o}{D'}$	$\frac{I_o}{D'}$

4.5 コンバータの動特性

つぎに、入力電圧、時比率および負荷抵抗に、微小変動を与えたときの信号動特性を調べる。式 (4.3), (4.7) から、次式が得られる。

$$(s - A)^{-1} = \frac{L C D'^2}{(1 + Z_o R) P(s)} \left\{ \begin{array}{cc} s + \frac{1}{RC} & -\frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C} & s + \frac{r}{L} \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

$$A_1 - A_2 = \left[\begin{array}{cc} -\frac{r_s - r_D}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{array} \right]$$

$$b_1 - b_2 = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{L} \\ 0 \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial R} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 C} \end{array} \right]$$

ここで,

$$\begin{aligned} P(s) &= 1 + 2\delta s/\omega_0 + (s/\omega_0)^2 \\ \delta &= \frac{1}{2D'R} \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{D'Z_o}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}} \\ \omega_0 &= \frac{D'}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + Z_o/R} \end{aligned} \quad (4.17)$$

以上の式を前章で求めた結果

$$\begin{aligned} \Delta X(s) &= (s-A)^{-1} \left\{ b_1 V_1(s) + [(A_1 - A_2)X + (b_1 - b_2)V_1]AD(s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial A}{\partial R} X \Delta R(s) \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

に代入すれば, 各微小変動分に対するコンバータの伝達関数として,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta X(s)}{\Delta V_1(s)} &= \frac{LC/D^2}{(1+Z_o/R)P(s)} \left(\begin{array}{c} (s + \frac{1}{RC})\frac{D}{L} \\ DD' \\ LC \end{array} \right) \\ \frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)} &= \frac{LC/D^2}{(1+Z_o/R)P(s)} \left(\begin{array}{c} (s + \frac{1}{RC})\frac{V_o}{DL} \left(1 + \frac{r_D + r_L}{D'R} \right) + \frac{V_o}{RLC} \\ \frac{D'}{D} \frac{V_o}{LC} \left(1 + \frac{r_D + r_L}{D'R} \right) - \left(s + \frac{r}{L} \right) \frac{V_o}{D'RC} \end{array} \right) \\ \frac{\Delta X(s)}{\Delta R(s)} &= \frac{LC/D^2}{(1+Z_o/R)P(s)} \left(\begin{array}{c} -\frac{D'V_o}{R^2LC} \\ \left(s + \frac{r}{L} \right) \frac{V_o}{R^2C} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

が得られる。さらに, 以上の結果を次式に示す形に整理できる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta X(s)}{\Delta V_1(s)} &= \frac{1}{P(s)} \left[\begin{array}{c} G_{1vo} \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{1vz}} \right) \\ G_{vvo} \end{array} \right] \\ \frac{\Delta X(s)}{\Delta D(s)} &= \frac{1}{P(s)} \left[\begin{array}{c} G_{1do} \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{1dz}} \right) \\ G_{vdo} \cdot \left(1 - \frac{s}{\omega_{vdz}} \right) \end{array} \right] \\ \frac{\Delta X(s)}{\Delta R(s)} &= \frac{1}{P(s)} \left[\begin{array}{c} -G_{1ro} \\ G_{vro} \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{vrz}} \right) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

降圧形・昇圧形 DC-DC コンバータに対して, 同様な方法で小信号動特性を求めることができ, 式 (4.20) に示すような形に統一できる。表 4.2 に降圧形, 昇圧形および昇降圧形コンバータに対し, 式 (4.20) に示す伝達関数の各パラメータを与えている。

ここで, すべてのコンバータは 2 次系であり, 昇圧形と昇降圧形コンバータ

表 4.2 電流連続モードでの PWM コンバータの動特性

回路方式	降 圧 形	昇 圧 形	昇 降 圧 形
δ	$\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{Z_o}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}} \sqrt{1 + Z_o/R}$	$\frac{1}{2D'R} \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{D'Z_o}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}} \sqrt{1 + Z_o/R}$	$\frac{1}{2D'R} \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{D'Z_o}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}} \sqrt{1 + Z_o/R}$
ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + Z_o/R}$	$\frac{D'}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + Z_o/R}$	$\frac{D'}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + Z_o/R}$
G_{vvo}	$\frac{1}{D' \sqrt{1 + Z_o/R}}$	$\frac{1}{D' \sqrt{1 + Z_o/R}}$	$\frac{D}{D' \sqrt{1 + Z_o/R}}$
G_{vdo}	$\left(\frac{V_o}{D'} + \frac{r_D + r_L}{1 + Z_o/R} \right) \frac{1}{1 + Z_o/R}$	$\frac{V_o}{D'} \frac{1 - \frac{r_D + r_L}{D'R}}{1 + Z_o/R}$	$\frac{V_o}{D'D'} \frac{1 - \frac{D'r_D + r_L}{D'R}}{1 + Z_o/R}$
G_{vdr}	∞	$\frac{D'V_o}{L} \left(1 - \frac{r_D + r_L}{D'R} \right)$	$\frac{D'V_o}{DL} \left(1 - \frac{D'r_D + r_L}{D'R} \right)$
G_{vro}	$\frac{Z_o V_o}{R^2} \frac{1}{1 + Z_o/R}$	$\frac{Z_o V_o}{R^2} \frac{1}{1 + Z_o/R}$	$\frac{Z_o V_o}{R^2} \frac{1}{1 + Z_o/R}$
ω_{vz}	$\frac{Z_o}{L}$	$\frac{D'Z_o}{L}$	$\frac{D'Z_o}{L}$
G_{1vo}	$\frac{D}{R} \frac{1}{1 + Z_o/R}$	$\frac{1}{D'R} \frac{1}{1 + Z_o/R}$	$\frac{D}{D'R} \frac{1}{1 + Z_o/R}$
ω_{1vz}	$\frac{1}{RC}$	$\frac{1}{RC}$	$\frac{1}{RC}$
G_{1do}	$\frac{V_o}{DR} \frac{1 + \frac{r_D + r_L}{1 + Z_o/R}}{1 + Z_o/R}$	$\frac{V_o}{D'R} \frac{2 - \frac{r_D + r_L}{D'R}}{1 + Z_o/R}$	$\frac{V_o}{D'D'R} \frac{1 + D + \frac{r_D + r_L}{D'R}}{1 + Z_o/R}$
ω_{1dz}	$\frac{1}{RC}$	$\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{r_D + r_L}{D'R}} \right)$	$\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{D}{1 + \frac{r_D + r_L}{D'R}} \right)$
G_{1ro}	$\frac{V_o}{R} \frac{1}{1 + Z_o/R}$	$\frac{V_o}{D'R} \frac{1}{1 + Z_o/R}$	$\frac{V_o}{D'R} \frac{1}{1 + Z_o/R}$

の場合、時比率に対する出力電圧の伝達関数に関しては、 s の右半平面に零点 ω_{vdz} を持つことがわかる。このことは、出力電圧変動を時比率に帰還するスイッチングレギュレータとしての動作に不安定を生じさせる原因となる。

4.6 レギュレーション特性

コンバータの出力電圧の微小変動に関しては、式 (4.20) よりつぎの結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} G_{vo}(s) &\triangleq \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} = \frac{G_{vvo}}{P(s)} \\ G_{vd}(s) &\triangleq \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta D(s)} = \frac{G_{vdo} \cdot (1 - s/\omega_{vdz})}{P(s)} \\ G_{vr}(s) &\triangleq \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta R(s)} = \frac{G_{vro} \cdot (1 + s/\omega_{vrz})}{P(s)} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

コンバータの出力電圧を検出し、基準電圧と比較し、その誤差を増幅し、時比率制御回路 (PWM controller) を通してスイッチのオン・オフ期間を制御することによって、出力電圧の調整が図られる。そのレギュレーション機構を式 (4.21) の伝達関数を用いてブロック線図で表すと図 4.3 のようにな

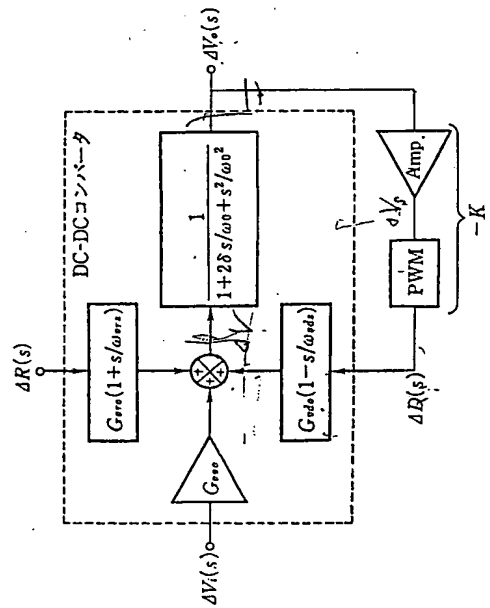


図 4.3 レギュレーション機構

る。ここで PWM 回路を含む帰還ループが利得 K の理想増幅器で構成されると仮定すれば、

$$\Delta D(s) = -K \Delta V_o(s) \quad (4.22)$$

となり、出力電圧の微小変動としては、

$$\Delta V_o(s) = \frac{G_{vvo}(s)}{1 + KG_{vd}(s)} \Delta V_i(s) + \frac{G_{vr}(s)}{1 + KG_{vd}(s)} \Delta R(s) \quad (4.23)$$

と求められる。式 (4.21) を用いると、上式は

$$\Delta V_o(s) = \frac{G_{vvo} \cdot \Delta V_i(s) + G_{vro} \cdot (1 + s/\omega_{vrz}) \cdot \Delta R(s)}{(1 + KG_{vdo}) \cdot \underbrace{[1 + 2\delta_f(s/\omega_{of}) + (s/\omega_{of})^2]}_{?}} \quad (4.24)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \delta_f &= \frac{\delta - KG_{vdo}\omega_{of}/(2\omega_{vdz})}{\sqrt{1 + KG_{vdo}}} \\ \omega_{of} &= \omega_o \sqrt{1 + KG_{vdo}} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

これがスイッチングコンバータのレギュレーション特性を表す基本式となる。

入力電圧と出力電流の変化に対し、出力電圧を一定に調整することは、スイッチングレギュレータの目的であり、入力電圧変動に対する出力の応答と定常偏差および負荷電流の変動に対する出力電圧の応答と垂下特性などを的確に表現する方法としては入出力特性 (audio susceptibility) と出力インピーダンス (output impedance) が挙げられる。つきに、帰還を施したときの入出力特性と出力インピーダンスを考える。

4.6.1 入出力特性

式 (4.24) から、入出力特性は

$$m(s) \triangleq \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta V_i(s)} = \frac{G_{vvo}}{1 + KG_{vdo}} \cdot \frac{1}{[1 + 2\delta_f(s/\omega_{of}) + (s/\omega_{of})^2]} \quad (4.26)$$

と求められる。

上式において、 s を $j\omega$ に置き換えれば、入力電圧に対する出力の周波数応答として、

$$m(j\omega) = \frac{\Delta V_o(j\omega)}{\Delta V_i(j\omega)} = \frac{G_{vvo}}{1 + KG_{vao}} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_{or})^2 + j2\delta_r(\omega/\omega_{or})} \quad (4.27)$$

が得られる。この周波数応答は共振特性を持つ。以下、その共振特性を調べる。

式 (4.27) に示す周波数応答の利得は

$$m = |m(j\omega)| = \frac{G_{vvo}}{1 + KG_{vao}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_{or})^2)^2 + (2\delta_r(\omega/\omega_{or}))^2}} \quad (4.28)$$

となる。この利得を周波数 ω で微分し、

$$\frac{dm}{d\omega} = 0 \quad (4.29)$$

とすると、

$$\omega = \omega_{or} \sqrt{1 - 2\delta_r^2} \quad (4.30)$$

が得られる。ただし、

$$\delta_r \leq 1/\sqrt{2} \quad (4.31)$$

したがって、帰還定数 K を増やして制動係数 δ_r を $1/\sqrt{2}$ 以下に減少すると、周波数特性にピークが現れ、いわゆる共振特性をもつ。すなわち、入力電圧に式 (4.30) に示す共振周波数と等しい周波数の変動分が重量された場合には、出力電圧に大きな変動分が現れる。そのときの利得のピーク値 M_p は式 (4.30) を式 (4.28) に代入することにより、次式で与えられる。

$$M_p = \frac{G_{vvo}}{1 + KG_{vao}} \cdot \frac{1}{2\delta_r \sqrt{1 - \delta_r^2}} \quad (4.32)$$

ここで、 δ_r が十分小さいときには、式 (4.30) と式 (4.32) は

$$\omega \simeq \omega_{or} = \omega_o \sqrt{1 + KG_{vao}} \quad (4.33)$$

$$M_p \simeq \frac{G_{vvo}}{2\delta_r(1 + KG_{vao})} = \frac{G_{vvo}}{(2\delta_r - KG_{vao}\omega_o/(\omega_{or}))\sqrt{1 + KG_{vao}}} \quad (4.34)$$

のように近似でき、帰還定数 K を増やすと共振周波数が上昇することがわかる。また、ピーク値については、降圧形の場合、 ω_{or} が無限大であるため、 K を増やすとピーク値は減少するが、昇圧形・降圧形の場合、 K がある値を越えると、 δ_r の減少の影響が大きくなり、ピーク値が急激に増加する。

図 4.4 に昇降圧形コンバータ回路に対する入出力特性の計算例を示し、図

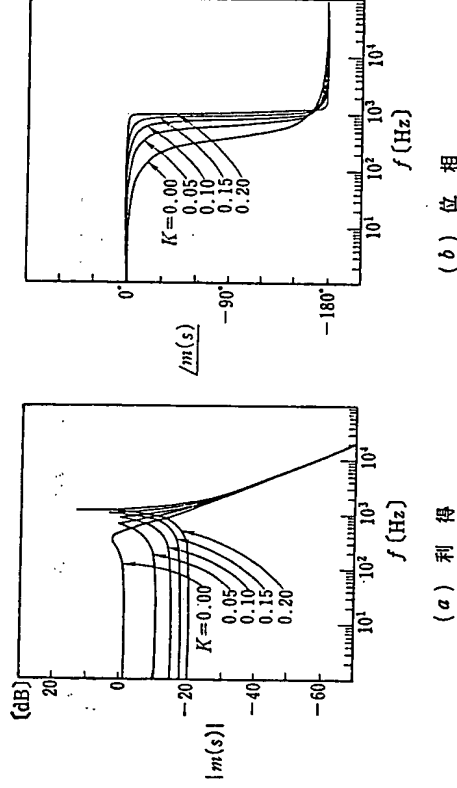


図 4.4 昇降圧形レギュレータの入出力特性

(a) は利得であり、図 (b) は位相を示す。図では、帰還定数 K をパラメータとして変化させている。 $K=0$ の特性は開ループの特性を表す。なお、計算に用いた回路のパラメータはつきに示される。

$$V_i = 12 \text{ V}, f_s = 100 \text{ kHz}, L = 50 \text{ } \mu\text{H}, C = 1000 \text{ } \mu\text{F}$$

$$r_s = 0.05 \text{ } \Omega, r_D = 0.02 \text{ } \Omega, r_L = 0.03 \text{ } \Omega$$

$$V_o = 10 \text{ V}, I_o = 4 \text{ A}$$

4.6.2 出力インピーダンス

スイッチングレギュレータの出力インピーダンスは、

$$z(s) \triangleq - \frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} \quad (4.35)$$

と定義される。出力電圧と出力電流の関係式 $V_o = I_o R$ において、負荷抵抗に微小変化をさせたことにより、出力電圧、出力電流が微小変化したととし、2 次の微小項を無視すると、

$$\Delta V_o = R \Delta I_o + I_o \Delta R$$

が得られ、この式にラプラス変換を施して整理すれば、

$$R \frac{\Delta I_o(s)}{\Delta V_o(s)} + \frac{V_o}{R} \frac{\Delta R(s)}{\Delta V_o(s)} = 1 \quad (4.36)$$

となり、出力インピーダンスは

$$z(s) = -\frac{\Delta V_o(s)}{\Delta I_o(s)} = \frac{R^2 V_o \cdot \Delta V_o(s) / \Delta R(s)}{1 - R / V_o \cdot \Delta V_o(s) / \Delta R(s)} \quad (4.37)$$

と求められる。

式 (4.24) に示す $\Delta V_o(s) / \Delta R(s)$ を代入して整理すれば、出力インピーダンスは

$$z(s) = \frac{R^2 / V_o \cdot G_{vro}}{1 + KG_{vro} - R / V_o \cdot G_{vro}} \cdot \frac{1 + s / \omega_{vrz}}{1 + 2\delta z s / \omega_{vz} + (s / \omega_{vz})^2} \quad (4.38)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \omega_{vz} &= \omega_o \sqrt{1 + KG_{vro} - R / V_o \cdot G_{vro}} \\ \delta z &= \frac{\delta - KG_{vro} \omega_o (2\omega_{vz}) - R / V_o \cdot G_{vro} \omega_o (2\omega_{vrz})}{\sqrt{1 + KG_{vro} - R / V_o \cdot G_{vro}}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

つぎに、出力インピーダンスの共振現象を調べる。出力インピーダンスの大きさは式 (4.38) から

$$z = |z(j\omega)| = \frac{R^2 / V_o \cdot G_{vro}}{1 + KG_{vro} - R / V_o \cdot G_{vro}} \cdot \sqrt{\frac{1 + (\omega / \omega_{vrz})^2}{[1 - (\omega / \omega_{vz})^2]^2 + [2\delta z (\omega / \omega_{vz})]^2}} \quad (4.40)$$

となる。これを ω で微分し、

$$\frac{dz}{d\omega} = 0 \quad (4.41)$$

とすると、

$$\omega = \omega_{vrz} \left(\sqrt{1 + (2 - 4\delta z^2) \frac{\omega_{vz}^2}{\omega_{vrz}^2} + \frac{\omega_{vz}^4}{\omega_{vrz}^4}} - 1 \right) \quad (4.42)$$

が得られる。したがって、出力インピーダンスは上式に示す周波数で最も大きい値を持つ。その値は式 (4.42) を式 (4.40) に代入することにより求めることができる。

図 4.5 に昇降形コンパネータ回路に対する出力インピーダンスの計算例を示し、図 (a) はインピーダンスの大きさであり、図 (b) は位相を示す。図では、帰還定数 K をパラメータとして変化させている。 $K=0$ の特性は開ループの出力インピーダンスを表す。なお、計算に用いた回路のパラメータは

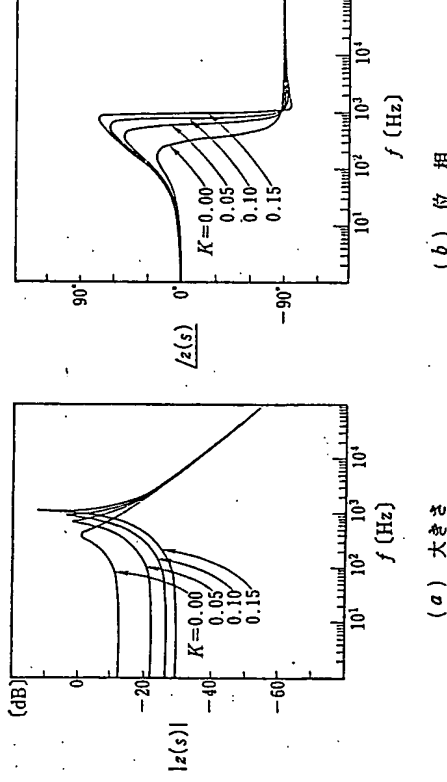


図 4.4 の場合と同様である。

4.6.3 定常偏差

定常平衡点で入力電圧および出力電流に小振幅のステップ状の変化をさせたときの出力電圧変化を考える。

入力電圧にステップ変化 ΔV_i をさせたとき、式 (4.26) に示す入力特性より、

$$\begin{aligned} \Delta V_o(s) &= m(s) \Delta V_i(s) \\ &= m(s) \Delta V_i / s \end{aligned} \quad (4.43)$$

が得られ、ラプラス変換の最終値定理を用いることにより、出力の定常偏差は

$$\begin{aligned} \Delta V_o &= \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta V_o(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} m(s) \Delta V_i \\ &\text{となり、これに式 (4.26) を代入すると、} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\frac{\Delta V_o}{\Delta V_i} = \frac{G_{vro}}{1 + KG_{vro}} \quad (4.45)$$

が得られる。上式の右側は入力特性 $m(s)$ の直流利得である。したがって、 $\Delta V_o / \Delta V_i$ の直流利得は、入力電圧のステップ変化に対する出力電圧の定常偏差を表す。表 4.2 に示すパラメータを代入すれば、その定常偏差は表 4.3 の

表 4.3 電流連続モードでの PWM レギュレータの定常偏差

回路方式	降圧形	昇圧形	昇降圧形
$\frac{\Delta V_o}{\Delta V_i}$	$\frac{D'}{D+KV}$	$\frac{1}{D'+KV}$	$\frac{D'}{DD'+KV}$
$-\frac{\Delta V_o}{\Delta I_o} (=Z)$	$\frac{Z_o}{1+\frac{KV_o}{D}\left(1+\frac{r_D+r_L}{R}\right)}$	$\frac{Z_o}{1+\frac{KV_o}{D'}\left(1-\frac{r_D+r_L}{D'R}\right)}$	$\frac{Z_o}{1+\frac{KV_o}{DD'}\left[1-\frac{D'r_D+r_L}{D'R}\right]}$

ように求められる。

出力電流にステップ変化 ΔI_o をさせるときは、式 (4.35) に示す出力インピーダンスを用いれば、

$$\begin{aligned}\Delta V_o &= -z(s)\Delta I_o(s) \\ &= -z(s)\Delta I_o/s\end{aligned}\quad (4.46)$$

が得られ、同様にラプラス変換の最終値定理を用いることにより、この場合の出力電圧の定常偏差は

$$\begin{aligned}\Delta V_o &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Delta V_o(s) \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} z(s)\Delta I_o\end{aligned}\quad (4.47)$$

となり、これに式 (4.38) を代入すると、負荷電流変動に対する出力電圧の定常偏差としては、

$$-\frac{\Delta V_o}{\Delta I_o} = \frac{R^2V_o \cdot G_{vro}}{1 + KG_{vdo} - R/V_o \cdot G_{vro}}\quad (4.48)$$

が得られる。上式の右側は、出力インピーダンス $z(s)$ の直流値、すなわち直流インピーダンス Z となる。したがって、直流出力インピーダンス Z は負荷電流変動による出力電圧の垂下特性を表している。表 4.2 に示した G_{vdo} 、 G_{vro} を上式に代入すると、各スイッチングレギュレータの垂下特性が表 4.3 のように求められる。

表 4.3 より、帰還定数 K を増やすことにより、入力電圧と出力電流の変動による出力電圧の定常偏差が小さく抑えられることがわかる。また、式 (4.25) より、帰還定数 K の増加によって、周波数 ω_{or} も高くなるので、入力電圧または負荷抵抗を変化したとき、過渡応答が速くなり、動特性を改善すること

が期待できる。

4.6.4 安定性

定常偏差を抑えるために、帰還定数 K をなるべく増やしたほうがよい。しかし、この帰還制御システムの特性方程式

$$1 + 2\delta_f(s\omega_{or}) + (s\omega_{or})^2 = 0\quad (4.49)$$

において、帰還定数 K をさらに増やすと、 δ_f が負になり、特性方程式の根が正になる。これは伝達関数の極が s の右半平面に生じることを意味し、システムは不安定になり、コンバータの出力電圧に低周波振動が現れる。ただし、降圧形コンバータの場合、 K の値によらず δ_f は常に正となり、制御システムは常に安定である。昇降圧形・昇降圧形コンバータの場合、安定限界は $\delta_f = 0$ で与えられ、そのときの帰還定数を K_{crit} とすると、式 (4.25) から、

$$K_{crit} = \frac{2\delta\omega_{vdr}}{G_{vdo}\omega_o}\quad (4.50)$$

と求められる。そこで表 4.2 で与えられている各パラメータを式 (4.50) に代入すれば、各コンバータに対し、帰還定数の限界値 K_{crit} が表 4.4 のように求められる。スイッチングレギュレータを安定に動作させるためには、帰還定数 K を限界値 K_{crit} 以下に抑える必要がある。

表 4.4 電流連続モードでの帰還定数の安定限界値 K_{crit}

回路方式	降圧形	昇圧形	昇降圧形
K_{crit}	∞	$\frac{D'}{V_o}\left(1+\frac{D''Z_oRC}{L}\right)$	$\frac{D'}{V_o}\left(1+\frac{D''Z_oRC}{L}\right)$

スイッチングレギュレータの安定性を改善するためには、帰還ループに位相補償回路を付け加えるか、または出力電圧とともにリアクトル電流を時比率に帰還するような多重ループ帰還を施すなどの措置が有効である。

以上の議論は帰還ループを理想化した場合であり、実際に、PWM 制御回路や誤差増幅器に位相遅れがあり、これらを考慮する場合はボード線図による解析、設計が必要となる。

演習問題

(1) 昇降圧コンバータについて、表 4.1 に示すパラメータを導け。(ヒント: 出力電圧のリプルはコンデンサに充電された電荷で決まる。)

(2) 昇降圧コンバータについて、表 4.2 に示す動特性のパラメータを導け。

(3) 時比率を $D = 0 \sim 1$ に変えたとき、電流連続モードにおける昇降圧コンバータの電圧変換率と時比率との関係を図示せよ。ただし、

$$r_s = 0.05 \Omega, r_D = 0.02 \Omega, r_L = 0.03 \Omega, R = 2 \Omega$$

とする。

(4) 昇降圧形スイッチングレギュレータにおいて、入力電圧を V_i 、負荷抵抗を R 、損失抵抗をそれぞれ r_s, r_D, r_L とする。帰還回路が時比率 D を制御することによって、出力電圧は V_o となる。そのときの時比率 D を求めよ。

$$\begin{aligned} V_i &= 12 \text{ V}, f_s = 100 \text{ kHz}, L = 50 \mu\text{H}, C = 1000 \mu\text{F} \\ r_s &= 0.05 \Omega, r_D = 0.02 \Omega, r_L = 0.03 \Omega \\ V_o &= 10 \text{ V}, I_o = 4 \text{ A} \end{aligned}$$

とした場合、時比率 D 、リアクトル電流のリプル Δi_L 、コンデンサ電圧のリプル Δv_C 、およびこれらのリプル率 $\Delta i_L/I_L, \Delta v_C/V_o$ を計算せよ。

(6) 昇降圧形コンバータにおいて、

$$\begin{aligned} V_i &= 12 \text{ V}, f_s = 100 \text{ kHz}, L = 50 \mu\text{H}, C = 1000 \mu\text{F} \\ r_s &= 0.05 \Omega, r_D = 0.02 \Omega, r_L = 0.03 \Omega \\ V_o &= 10 \text{ V}, I_o = 4 \text{ A} \end{aligned}$$

とした場合、 $G_{\text{con}}, G_{\text{dco}}, G_{\text{err}}, \delta, \omega_o, \omega_{\text{dco}}, \omega_{\text{err}}$ を計算せよ。

(7) リアクトルのインダクタンスがそれぞれ $L = 50 \mu\text{H}, 0.5 \text{ mH}$ に対し、図 4.3 のように帰還を施した場合、昇降圧形コンバータの帰還定数の安定限界を計算せよ。ただし、

$$\begin{aligned} V_i &= 12 \text{ V}, f_s = 100 \text{ kHz}, C = 1000 \mu\text{F} \\ r_s &= 0.05 \Omega, r_D = 0.02 \Omega, r_L = 0.03 \Omega \\ V_o &= 10 \text{ V}, I_o = 4 \text{ A} \end{aligned}$$

とする。

(8) 帰還定数をそれぞれ上記安定限界の半分とし、入力電圧と出力電流にそれぞれ $1 \text{ V}, 1 \text{ A}$ と変動させた場合、出力電圧に生じる定常偏差を計算せよ。

参考文献

- [1] 原田耕介, 二宮 保監修: “スイッチング電源技術”, 日本工業技術センター, 昭和 63 年
- [2] R. D. Middlebrook and Slobodan Cuk: “A general unified approach to modeling switching-converter power stages”, IEEE PESC'76 Record, pp. 18 ~ 34, June 1976



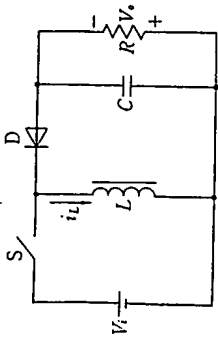
電流不連続モードの 特性解析

前章の議論はリアクトル電流が零にならない電流連続モードであったが、負荷抵抗が大ききとき、あるいはリアクトルのインダクタンスが小さいとき、リアクトルの電流が零になる期間がある。この期間に、スイッチとダイオードがともにオフとなっている。このようなリアクトル電流が零になる状態が存在する動作モードを“リアクトル電流不連続モード (discontinuous conduction mode, DCM)”と称する。この場合、コンバータは前章で述べた電流連続モードの場合とは著しく異なる動作をし、特性解析を行うには第 3 章で述べた状態平均化法を適用することができ、取扱いの際に幾つか異なる点がある。本章では、昇降圧形コンバータを例に、コンバータの内部損失を無視し、状態平均化法の基本式を導出し、特性解析を行う。

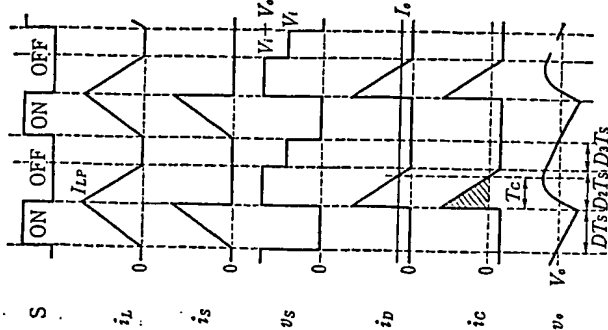
5.1 状態平均化方程式の導出

前章の図 4.2 に示したリアクトル電流連続モードの動作波形において、負荷抵抗が大きくなるにつれ、負荷電流とともに、リアクトル電流の平均値も小さくなり、リアクトル電流波形の下側のピークが零に近づいていく。負荷電流をある値まで下げると、リアクトル電流波形の下側のピークが零に達し、コンバータの動作はリアクトル電流不連続モードに入る。また、リアクトルのインダクタンスが小さくなるとき、リアクトル電流のリプルが大きくなり、電流波形の下側のピークが零に近づき、この場合もリアクトル電流不連続モードが生じる。

図 5.1 に昇降圧形コンバータの回路と、リアクトル電流不連続モードにおける動作波形を示す。図 (b) の波形では、 i_L はリアクトル電流、 i_s はスイッチの電流、 v_s はスイッチの電圧、 i_D はダイオードの電流、 i_C はコンデンサ



(a) 基本回路



(b) 動作波形

図 5.1 昇降圧形コンバータ回路と電流不連続モードにおける動作波形

の電流, v_o は出力の電圧波形を示す。回路の動作はスイッチオン ($0 \leq t \leq DT_s$), ダイオードオン ($DT_s \leq t \leq (D+D_2)T_s$), スイッチとダイオードが共にオフ ($(D+D_2)T_s \leq t \leq (D+D_2+D_3)T_s$) と 3つの状態に分けられる。図 5.1 (b) から $D+D_2+D_3=1$ となることがわかる。

図 5.2 に各状態に対応するコンバータの等価回路を示す。ただし, すべての内部損失抵抗を無視している。スイッチがオンのとき ($0 \leq t \leq DT_s$), 等価回路は図 5.2 (a) となり, リアクトルに入力電圧が加えられ, リアクトル

電流は零から増加する。この間, エネルギーは入力電源からリアクトルに蓄積され, 負荷電力は平滑コンデンサから供給される。スイッチがオフのとき ($DT_s \leq t \leq (D+D_2)T_s$), ダイオードがオンとなり, 等価回路は図 (b) となり, リアクトルに出力電圧が加えられ, リアクトル電流は零まで減少していく。この間, リアクトルに蓄積されたエネルギーは平滑コンデンサを充電すると同時に, 負荷に放出される。リアクトルの電流が零に減少すると, ダイオードの逆阻止のため, 電流は不連続となる。 ($D+D_2)T_s \leq t \leq (D+D_2+D_3)T_s$ の間, スイッチとダイオードが共にオフとなり, 等価回路は図 (c) に示される。この間, 負荷電力は平滑コンデンサから供給される。

つぎに, 状態変数を $x = [i_L \quad v_o]^T$ とし, 図 5.2 の等価回路に基づき, 状態平均化法の基本式を導出する。

状態 I [図 (a), $0 \leq t \leq DT_s$, スイッチオン時] の等価回路に対し, キルヒホッフ電圧法および電流法則を用いることにより,

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{V_i}{L} \\ \frac{dv_o}{dt} = -\frac{v_o}{RC} \end{cases} \quad (5.1)$$

が得られる。ただし, リアクトル電流の初期条件は

$$i_L(0) = 0 \quad (5.2)$$

である。行列を用いて表すと,

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 x(t) + b_1 V_i \quad (5.3)$$

となる。ただし,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ b_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで, 出力電圧 v_o の変化が小さいため, 式 (5.1) の右辺を定数と見なせば, 微分を定数と考えてよい。その結果, この期間のリアクトル電流 i_L お

よび出力電圧 v_o を直線で近似することができ、式 (5.1) から

$$\begin{aligned} i_L(DT_s) - i_L(0) &= DT_s \cdot \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= DT_s \cdot \frac{V_i}{L} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} v_o(DT_s) - v_o(0) &= DT_s \cdot \frac{dv_o}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= -DT_s \cdot \frac{v_o(0)}{RC} \end{aligned} \quad (5.6)$$

が得られる。

状態Ⅱ [図 (b), $DT_s \leq t \leq (D + D_2)T_s$, ダイオードオン時] の等価回路に対しても、同様に

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{v_o}{L} \quad (5.7a)$$

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{i_L}{C} - \frac{v_o}{RC} \quad (5.7b)$$

が得られ、行列を用いて表すと、

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_2 x(t) + b_2 V_i \quad (5.8)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

ここで、出力電圧 v_o の変化が小さいため、式 (5.7a) に示す微分 di_L/dt は近似的に定数となり、リアクトル電流 i_L に関しては直線近似でき、式 (5.7a) から、

$$\begin{aligned} i_L[(D + D_2)T_s] - i_L(DT_s) &= D_2 T_s \cdot \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=DT_s} \\ &= D_2 T_s \cdot \left[-\frac{v_o(DT_s)}{L} \right] \\ &= -D_2 T_s \cdot \frac{v_o(0)}{L} \end{aligned} \quad (5.10)$$

が得られる。一方、出力電圧 v_o に関しては、式 (5.7b) の右側にあるリアクトル電流 i_L が零になるまで大きく変化するため、微分 dv_o/dt を定数と見なすことができず、出力電圧 v_o は直線近似できない。そこで、式 (5.7b) を積分すると、

$$v_o[(D + D_2)T_s] - v_o(DT_s) = \frac{1}{C} \int_{DT_s}^{(D+D_2)T_s} i_L(t) dt - \frac{1}{C} \int_{DT_s}^{(D+D_2)T_s} v_o(t) \frac{dt}{R} \quad (5.11)$$

が得られる。右辺の積分はコンデンサに流れる電流の積分、すなわちコンデンサに充電された電荷を表す。1 番目の積分はリアクトル電流の三角形の面積と等しくなり、2 番目の積分は関数 $v_o(t)$ が $v_o(0)$ で近似でき、上式は

$$v_o[(D + D_2)T_s] - v_o(DT_s) = D_2 T_s \cdot \frac{I_{LP}/2}{C} - D_2 T_s \cdot \frac{v_o(0)}{RC} \quad (5.12)$$

となる。ただし、 I_{LP} はリアクトル電流のピーク値であり、

$$I_{LP} = i_L(DT_s) = \frac{DT_s V_i}{L} \quad (5.13)$$

となる。

状態Ⅲ [図 (c), $(D + D_2)T_s \leq t \leq T_s$, スイッチオフ, ダイオードオフ時] に対し、等価回路より、

$$\begin{aligned} i_L &= 0 \\ \frac{dv_o}{dt} &= -\frac{v_o}{RC} \end{aligned} \quad (5.14)$$

が得られ、行列で表すと、

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_3 x(t) + b_3 V_i \quad (5.15)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

同様に、直線近似を用いると、式 (5.14) より、

$$i_L(T_s) - i_L[(D + D_2)T_s] = 0 \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} v_o(T_s) - v_o((D+D_s)T_s) &= D_s T_s \cdot \frac{dv_o}{dt} \Big|_{(1-(D+D_s)T_s)} \\ &= -D_s T_s \cdot \frac{v_o(0)}{RC} \end{aligned} \quad (5.18)$$

が得られる。

以上、式 (5.5), (5.6), (5.10), (5.12), (5.17), (5.18) に示す各状態の解析結果をつなぎ合わせると、

$$\left. \begin{aligned} i_L(T_s) - i_L(0) &= -D_s T_s \cdot \frac{v_o(0)}{L} + D T_s \cdot \frac{V_i}{L} \\ v_o(T_s) - v_o(0) &= D_s T_s \cdot \frac{I_{LP}/2}{C} - (D + D_s) T_s \cdot \frac{v_o(0)}{RC} \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

が得られる。この差分方程式はつぎの微分方程式で近似できる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_L(t)}{dt} &= -D_s \cdot \frac{v_o(t)}{L} + D \cdot \frac{V_i}{L} \\ \frac{dv_o(t)}{dt} &= D_s \cdot \frac{i_L(t)}{C} - (D + D_s) \cdot \frac{v_o(t)}{RC} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

ただし、

$$i_L(t) = I_{LP}/2 = \frac{DT_s V_i}{2L} \quad (5.21)$$

すなわち、見掛け上のリアクトル電流はピーク値の 1/2 となる。さらに、リアクトル電流が不連続であることより、つぎの拘束条件

$$\frac{di_L(t)}{dt} = 0 \quad (5.22)$$

が得られる。したがって、式 (5.20) ~ (5.22) により、電流不連続モードにおける昇降圧形コンバータの特性を調べることができる。

一方、第 2 章で述べた状態平均化法を用いて得られる状態平均化方程式

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = [DA_1 + D_s A_s + D_s A_s] \bar{x}(t) + [D b_1 + D_s b_s + D_s b_s] V_i \quad (5.23)$$

に、各係数行列を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{i}_L(t)}{dt} &= -D_s \cdot \frac{\bar{v}_o(t)}{L} + D \cdot \frac{V_i}{L} \\ \frac{d\bar{v}_o(t)}{dt} &= D_s \cdot \frac{\bar{i}_L(t)}{C} - (D + D_s) \cdot \frac{\bar{v}_o(t)}{RC} \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

となる。これは形として、式 (5.20) と一致する。したがって、状態平均化法により導かれた状態方程式 (5.24) に加え、

$$\bar{i}_L(t) = I_{LP}/2 \quad (5.25)$$

$$\frac{d\bar{i}_L(t)}{dt} = 0 \quad (5.26)$$

とすれば、電流不連続モードにおける昇降圧形コンバータの特性を調べることができる。式 (5.25) は見掛け上の平均化リアクトル電流がピーク値の半分であることを意味し、式 (5.26) は電流不連続による拘束条件を示す。

同様に、電流不連続モードで動作する降圧形・昇圧形コンバータについても、式 (5.23) に示すように状態平均化法を用い、見掛け上のリアクトル電流の平均値をピーク値の 1/2 とし、それに、電流不連続の拘束条件を加えれば、平均化された状態方程式が得られ、それに基づき、特性解析を行うことができる。

5.2 コンバータの定常特性

式 (5.24) ~ (5.26) において、 $d\bar{x}/dt = 0$ とおくことにより、電流不連続モードで動作する昇降圧形コンバータの電圧変換率、見掛け上のリアクトル電流の平均値 I_L および状態 II の時比率 D_s はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_o}{V_i} &= \frac{D}{D_s} \\ I_L &= \frac{V_o}{D_s R} = \frac{I_o}{D_s} \\ D_s &= \sqrt{F} \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

と求められる。ただし、

$$F = \frac{2L}{RT_s} = \frac{2f_s L}{R} \quad (5.28)$$

電圧変換率はリアクトルの磁束変化の観点からも求められる。スイッチがオフのとき、リアクトルに電圧 V_i が加えられ、リアクトルが励磁され、磁束の増加分は

$$\Delta\phi_{on} = V_L D T_s \quad (5.29)$$

となる。ダイオードがオンの間には、リアクトルに先に逆方向に電圧 V_o が加えられ、リアクトルの磁束がリセットされ、磁束の減少分は

$$\Delta\phi_{off} = V_o D_1 T_s \quad (5.30)$$

となる。スイッチとダイオードが共にオフになっている間は、リアクトルに磁束の変化がない。定常状態では、リアクトル磁束の増加分と減少分が等しいことから、電圧変換率が求められ、式 (5.27) と同じ結果となる。

図 5.1 に示す波形から、リアクトル電流不連続の条件は明らかに

$$D_2 \leq 1 - D \quad (5.31)$$

となる。式 (5.27), (5.31) を用いて、リアクトル電流連続と不連続の境界条件に対する F の値 F_{crit} は

$$F_{crit} = (1 - D)^2 \quad (5.32)$$

と求められる。境界の負荷抵抗、負荷電流と出力電圧はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} R_{crit} &= \frac{2L}{(1-D)^2 T_s} \\ I_{ocrit} &= \frac{D(1-D)T_s V_L}{2L} \\ V_{ocrit} &= \frac{D}{1-D} V_L \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

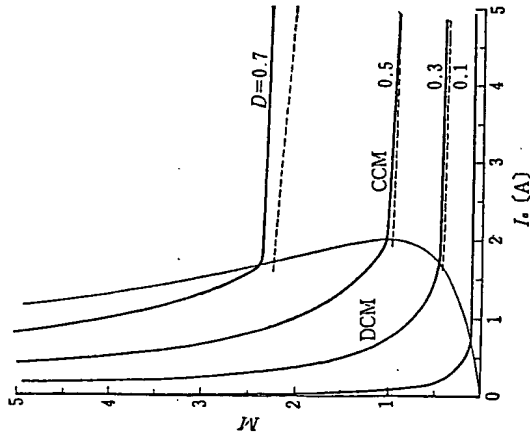
となる。

図 5.3 昇降圧形コンバータの負荷特性

メータを持つ昇降圧形コンバータに対し、電流連続モードと電流不連続モードにおける負荷特性の計算結果を示す。ただし、実線は内部損失抵抗を考慮しない結果である。

$$V_L = 12 \text{ V}, f_s = 100 \text{ kHz}, L = 7.5 \mu\text{H}, C = 470 \mu\text{F}$$

$$r_s = 0.05 \Omega, r_D = 0.02 \Omega, r_L = 0.03 \Omega$$



電流不連続モードで、出力電圧の異常上昇現象が見られる。また、電流連続モードでは、内部損失抵抗を考慮した場合、破線で示されるように、出力電圧が若干低下している。

5.3 リプル率

以下、図 5.1 に示した動作波形を参考にし、リアクトル電流、出力電圧のリプルとリプル率を求める。リアクトルの電流リプルは

$$\Delta i_L = I_{LP} = \frac{D T_s V_L}{L} \quad (5.34)$$

となる。実際のリアクトル電流の平均値は三角形の面積を 1 周期に平均したものであり、

$$I_L = \frac{(D + D_2) I_{LP}}{2} = \frac{(D + D_2) D T_s V_L}{2L} \quad (5.35)$$

となり、リアクトル電流のリプル率は

$$\frac{\Delta i_L}{I_L} = \frac{2}{(D + D_2)} \quad (5.36)$$

と求められる。ダイオードがオンの期間 ($D_2 T_s$ 期間) では、リアクトル電流は

$$i_L(t) = I_{LP} - \frac{V_o}{L} t \quad (5.37)$$

と表され、その電流から負荷電流を引いた分はコンデンサを充電する電流となる。そこで、図 5.1 のように、充電時間を T_c とし、

$$i_L(T_c) = I_o \quad (5.38)$$

とおくことから、

$$T_c = \frac{L I_{LP}}{V_o} (1 - D_2/2) \quad (5.39)$$

が得られ、コンデンサに充電された電荷は

$$\begin{aligned} Q &= (I_{LP} - I_o) T_c / 2 \\ &= \frac{T_s^2 V_o}{2L} D^2 (1 - D_2/2)^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

と求められる。図 5.1 に示すコンデンサ電流 i_c の陰の面積はその電荷を示

す。コンデンサの電圧はその電荷のため上昇する。したがって、出力電圧のリプルは

$$\Delta v_o = \frac{Q}{C} = \frac{T_s V_o}{2LC} D_2^2 (1 - D_2/2)^2 \quad (5.41)$$

となり、出力電圧のリプル率はずきのように求められる。

$$\frac{\Delta v_o}{V_o} = \frac{T_s^2}{2LC} D_2^2 (1 - D_2/2)^2 \quad (5.42)$$

降圧形・昇圧形コンバータについても同様な手順で解析ができ、表 5.1 に各コンバータの静特性をまとめている。

表 5.1 電流不連続モードでの PWM コンバータの静特性

回路方式	降 圧 形	昇 圧 形	昇 降 圧 形
M	$\frac{D}{D+D_1}$	$\frac{D+D_1}{D_1}$	$\frac{D}{D_1}$
D_1	$\frac{F}{D} \frac{1+\sqrt{1+4F/D^2}}{2}$	$\frac{F}{D} \frac{1+\sqrt{1+4D/F}}{2}$	\sqrt{F}
I_{LP}	$\frac{V_i - V_o}{L} DT_s$	$\frac{V_i}{L} DT_s$	$\frac{V_i}{L} DT_s$
F_{crit}	$1 - D$	$D(1 - D)^2$	$(1 - D)^2$
I_{oorit}	$\frac{D(1 - D)T_s V_i}{2L}$	$\frac{D(1 - D)T_s V_i}{2L}$	$\frac{D(1 - D)T_s V_i}{2L}$
$\frac{\Delta v_o}{V_o}$	$\frac{T_s^2}{2LC} D_1 (D + D_1) \left(1 - \frac{D+D_1}{2}\right)^2$	$\frac{T_s^2}{2LC} \frac{DD_1}{D+D_1} \left(1 - \frac{D_1}{2}\right)^2$	$\frac{T_s^2}{2LC} D^2 \left(1 - \frac{D_1}{2}\right)^2$

5.4 コンバータの動特性

いま、式 (5.24)~(5.26) から得られた昇降圧形コンバータの状態平均化方程式

$$\left. \begin{aligned} D_2 \dot{v}_o &= DV_i \\ \frac{d\tilde{v}_o}{dt} &= \frac{D_2}{C} \tilde{i}_L - \frac{1}{RC} \tilde{v}_o \\ \dot{\tilde{i}}_L &= \frac{D_1}{2L} \tilde{v}_i \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

に対し、定常状態において、微小変動を与えたときの動特性を考える。

式 (5.43) において、 $V_i \rightarrow V_i + \Delta V_i$, $R \rightarrow R + \Delta R$, $D \rightarrow D + \Delta D$, $D_2 \rightarrow D_2 + \Delta D_2$, $\tilde{i}_L \rightarrow \tilde{i}_L + \Delta \tilde{i}_L$, $\tilde{v}_o \rightarrow \tilde{v}_o + \Delta \tilde{v}_o$ のように置き換え、2 次の微小項を無視し、微小変動分を取り出せば、

$$\left. \begin{aligned} D_2 \Delta \tilde{v}_o + V_o \Delta D_2 &= D \Delta V_i + V_i \Delta D \\ \frac{d\Delta \tilde{v}_o}{dt} &= \frac{D_2}{C} \Delta \tilde{i}_L - \frac{1}{RC} \Delta \tilde{v}_o + \frac{D_2}{R^2 C} \Delta R \\ \Delta \tilde{i}_L &= \frac{DT_s}{2L} \Delta V_i + \frac{T_s V_i}{2L} \Delta D \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

が得られる。この式から ΔD_2 , $\Delta \tilde{i}_L$ を消去し、 $\Delta \tilde{v}_o$ に関して定常値を用いて整理すれば、

$$\frac{d\Delta \tilde{v}_o}{dt} = -\frac{2}{RC} \Delta \tilde{v}_o + \frac{D}{D_2} \frac{2}{RC} \Delta V_i + \frac{V_o}{D} \frac{2}{RC} \Delta D + \frac{V_o}{R} \frac{1}{RC} \Delta R \quad (5.45)$$

が得られる。この式に対し、ラプラス変換を施すと、次式に示す伝達関数が求められる。

$$\Delta V_o(s) = \frac{1}{1 + sRC/2} \left[\frac{D}{D_2} \Delta V_i(s) + \frac{V_o}{D} \Delta D(s) + \frac{V_o}{2R} \Delta R(s) \right] \quad (5.46)$$

降圧形・昇圧形コンバータについても同様に解析ができ、降圧形、昇圧形および昇降圧形コンバータの伝達関数としては、次式に示す形に統一できる。

$$\Delta V_o(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_o} [G_{voo} \Delta V_i(s) + G_{vdo} \Delta D(s) + G_{vro} \Delta R(s)] \quad (5.47)$$

各パラメータは表 5.2 に示されている。

表 5.2 電流不連続モードでの PWM コンバータの動特性

回路方式	降 圧 形	昇 圧 形	昇 降 圧 形
ω_o	$\frac{2}{RC} \frac{D+2D_1}{2D_1}$	$\frac{2}{RC} \frac{2D+D_1}{2D_1}$	$\frac{2}{RC}$
G_{voo}	$\frac{D}{D+D_1}$	$\frac{D+D_1}{D_1}$	$\frac{D}{D_1}$
G_{vdo}	$\frac{V_o}{D} \frac{2D_1}{D+2D_1}$	$\frac{V_o}{D} \frac{2D}{2D+D_1}$	$\frac{V_o}{D}$
G_{vro}	$\frac{V_o}{R} \frac{D_1}{D+2D_1}$	$\frac{V_o}{R} \frac{D}{2D+D_1}$	$\frac{V_o}{R} \frac{1}{2}$

た負荷特性の場合と同じであるが、内部損失抵抗を無視し、出力電圧を $V_o = 10\text{ V}$ 、出力電流を $I_o = 1\text{ A}$ としていた。

電流連続モードの場合と同様に、定常状態において、入力電圧、または負荷電流に微小量のステップ状態変化をさせたとき、出力に生じる定常偏差は、それぞれ入力特性と出力インピーダンスの直流値で表され、

$$\frac{\Delta V_o}{\Delta V_i} = \frac{G_{voo}}{1 + KG_{voo}} \quad (5.53)$$

$$-\frac{\Delta V_o}{\Delta I_o} = \frac{R^2/V_o \cdot G_{voo}}{1 + KG_{voo}} - R/V_o \cdot G_{voo} \quad (5.54)$$

となる。

表 5.2 に示したパラメータを式 (5.49)、(5.52) ~ (5.54) に代入すれば、各レギュレータの定常偏差および遮断周波数は表 5.3 のように求められる。

表 5.3 電流不連続モードでのレギュレーション特性

回路方式	降圧形	昇圧形	昇降圧形
$\frac{\Delta V_o}{\Delta V_i}$	$\frac{D}{D+D_i} \cdot \frac{D+2D_i}{2D_i} \cdot \frac{D}{1+\frac{D}{2D_i}+\frac{D}{D}}$	$\frac{D+D_i}{D_i} \cdot \frac{2D+D_i}{2D_i} \cdot \frac{D}{1+\frac{D}{2D_i}+\frac{D}{D}}$	$\frac{D}{D_i} \cdot \frac{KV_o}{1+\frac{KV_o}{D}}$
ω_{oi}	$\frac{2}{RC} \left(1 + \frac{D}{2D_i} + \frac{KV_o}{D} \right)$	$\frac{2}{RC} \left(1 + \frac{D_i}{2D} + \frac{KV_o}{D} \right)$	$\frac{2}{RC} \left(1 + \frac{KV_o}{D} \right)$
$-\frac{\Delta V_o}{\Delta I_o} (=Z)$	$\frac{R}{D+D_i} \cdot \frac{2KV_o}{1+\frac{D}{2D_i}+\frac{D}{D}}$	$\frac{R}{1+\frac{D_i}{D}+\frac{2KV_o}{D}}$	$\frac{R}{1+\frac{2KV_o}{D}}$
ω_{os}	$\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{D}{D_i} + \frac{2KV_o}{D} \right)$	$\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{D_i}{D} + \frac{2KV_o}{D} \right)$	$\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{2KV_o}{D} \right)$

表 5.3 から、電流不連続モードの場合も、帰還定数 K を十分大きくすれば、定常偏差を十分小さく抑えることができる。また、時定数 $1/\omega_{oi}$ は帰還定数 K の増加に伴って小さくなるので、過渡応答を改善することもできる。

演習問題

- (1) 降圧形コンバータに対し、電流不連続モードにおける電圧変換率とリプル率などの静特性を求めよ。

(2) 昇降圧形コンバータにおいて、 $f_s = 100\text{ kHz}$ 、 $L = 7.5\text{ }\mu\text{H}$ 、 $C = 470\text{ }\mu\text{F}$ とする。コンバータの出力電圧が $V_o = 10\text{ V}$ において、連続モードと不連続モードの境界における出力電力と時比率との関係を求め、図示せよ。ただし、内部損失を無視する。

(3) $f_s = 100\text{ kHz}$ で動作する昇降圧形コンバータにおいて、 $V_i = 8\text{ V} \sim 16\text{ V}$ の間に入力電圧の変化がある場合、出力電圧は帰還制御によって一定値 $V_o = 10\text{ V}$ に保たれているとする。10 W 以上の出力電力 ($P_o \geq 10\text{ W}$) に対し、コンバータが常に電流連続モードで動作するようなリアクトルのインダクタンスの最小値を求めよ。

(4) 昇降圧形コンバータに対し、表 5.2 に示す動特性のパラメータを求めよ。

(5) 昇降圧形コンバータにおいて、

$$V_i = 12\text{ V}, f_s = 100\text{ kHz}, L = 7.5\text{ }\mu\text{H}, C = 470\text{ }\mu\text{F}$$

$$V_o = 10\text{ V}, I_o = 1\text{ A}$$

とする。この場合に対し、 D 、 D_i 、 G_{voo} 、 G_{vdo} 、 G_{vrs} 、 ω_o を計算せよ。

(6) 昇降圧形コンバータに対し、表 5.3 に示すレギュレーション特性を求めよ。

参 考 文 献

- (1) 原田耕介, 二宮 保監修: “スイッチング電源技術”, 日本工業技術センター, 昭和 63 年
- (3) Siobodan Cuk and R. D. Middlebrook: “A general unified approach to modelling switching-converter in discontinuous conduction mode”, IEEE PESC'77 Record, pp. 36 ~ 57, June 1977